

Señales y Sistemas

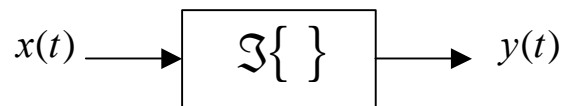
“Sistemas”

Luis Jaraquemada S.

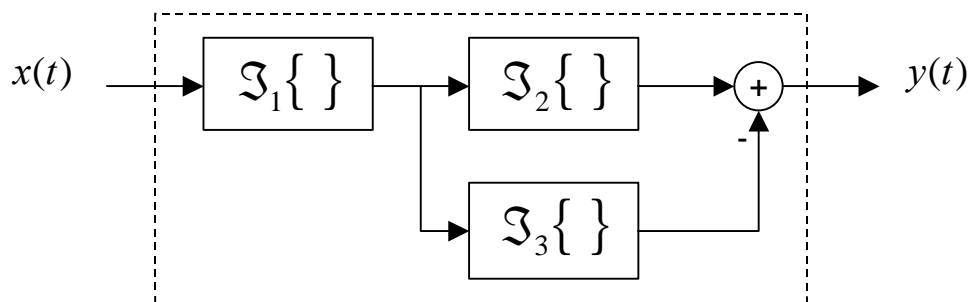
Un modelo simple de sistema se representa por una entidad poseedora de una entrada $x(t)$ y una salida $y(t)$. La relación entre entrada y salida del sistema está dada por la operación $\mathfrak{S}\{ \}$ de la siguiente forma:

$$y(t) = \mathfrak{S}\{x(t)\}$$

La representación en diagrama de bloques del sistema es:



Un sistema puede estar compuesto por varios subsistemas que interactúan entre sí, tal como



En este caso la relación entre la entrada y la salida del sistema está dada por:

$$y(t) = \mathfrak{S}_2\{\mathfrak{S}_1\{x(t)\}\} - \mathfrak{S}_3\{\mathfrak{S}_1\{x(t)\}\}$$

En este caso, al reducir el sistema a un solo bloque, éste queda definido por la operación:

$$\mathfrak{S}\{ \} = \mathfrak{S}_2\{\mathfrak{S}_1\{ \} \} - \mathfrak{S}_3\{\mathfrak{S}_1\{ \} \}$$

Propiedades de los sistemas:

Memoria:

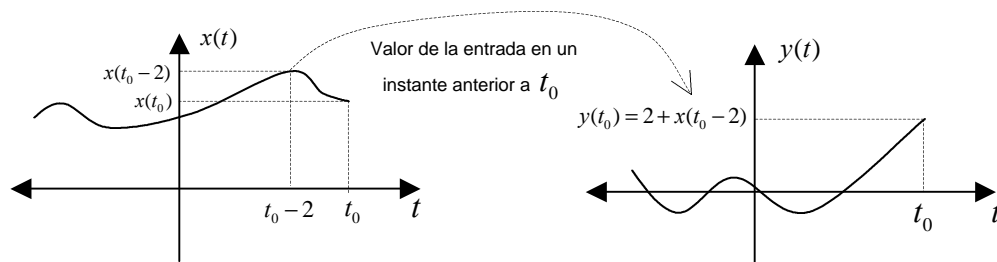
Se dice que un sistema es con memoria si, la salida $y(t)$ en un instante determinado t_0 depende de la entrada $x(t)$ en al menos un instante t_1 , con $t_0 > t_1$. Es decir, en un instante determinado, el sistema debe “recordar” el valor de la entrada en un instante anterior para poder generar la salida.

Entre los sistemas con memoria, se pueden mencionar los siguientes ejemplos:

a.

$$y(t) = \mathfrak{Z}\{x(t)\} = 2 + x(t - 2)$$

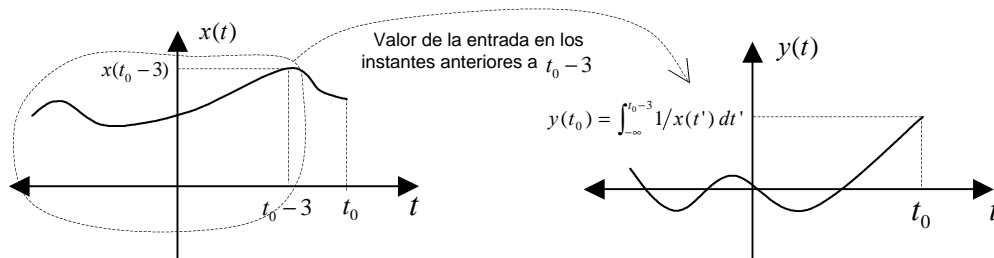
En este caso, la salida $y(t)$ del sistema depende de la entrada en 2 unidades de tiempo anteriores.



b.

$$y(t) = \mathfrak{Z}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{t-3} \left(\frac{1}{x(t')} \right) dt'$$

En este sistema, la salida $y(t)$ es generada requiriendo todos los valores que ha tomado la entrada $x(t)$ desde $-\infty$ hasta $t - 3$.



Causalidad:

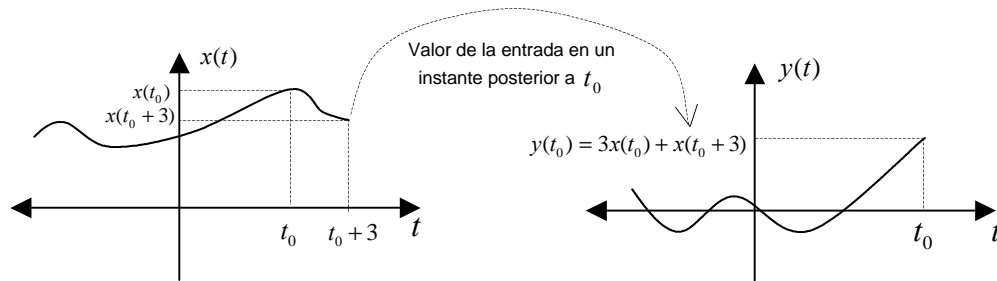
Se dice que un sistema es causal si, su salida $y(t)$ en un instante t_0 no depende de valores de la entrada en t_1 , con $t_1 > t_0$. Es decir, el sistema no debe necesitar “predecir” valores futuros de la entrada.

A continuación se analiza la propiedad de causalidad para algunos ejemplos:

a.

$$y(t) = \Im\{x(t)\} = 3x(t) + x(t+3)$$

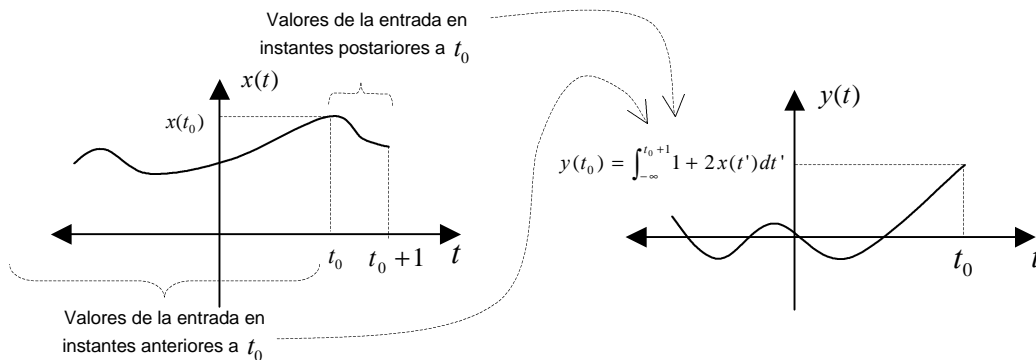
En este caso, la salida $y(t)$ del sistema depende de la entrada en 3 unidades de tiempo posteriores.



b.

$$y(t) = \Im\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{t+1} 1 + 2x(t') dt'$$

En este sistema, la salida $y(t)$ es generada requiriendo todos los valores que ha tomado la entrada $x(t)$ desde $-\infty$ hasta $t+1$, es decir, el sistema necesita conocer el valor de la entrada en hasta 1 unidad de tiempo posterior. Adicionalmente, este sistema cuenta con memoria pues, para obtener su salida $y(t)$, utiliza los valores de la entrada en instantes pasados, desde $-\infty$ hasta justo antes de t .



Variabilidad en el tiempo:

Un sistema es variante en el tiempo cuando la operación $\mathfrak{S}\{ \}$ que relaciona la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$, es diferente en al menos dos instantes de tiempo.

Un ejemplo de un sistema con esta propiedad es:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + 2 \int_{-\infty}^t x(t') dt' & \text{si } t < 2 \\ x(t-1) + x(t) - 4x(t+1) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

No importando la complejidad de las operaciones que definen al sistema, lo que determina que el sistema sea variante en el tiempo, es que éstas son distintas para distintos instantes de tiempo. Es decir, si a este sistema se le aplica la misma entrada en dos tiempos, $t_1 < 2$ y $t_2 \geq 2$, las salidas $y(t_1)$ y $y(t_2)$ serán distintas, generalmente hablando.

Linealidad:

Un sistema es lineal si cumple con el principio de superposición. La definición matemática para un sistema lineal establece que éste debe cumplir:

$$\mathfrak{S}\{V_1 x_1(t) + V_2 x_2(t)\} = V_1 \mathfrak{S}\{x_1(t)\} + V_2 \mathfrak{S}\{x_2(t)\} = V_1 y_1(t) + V_2 y_2(t)$$

$y_1(t)$ es la salida del sistema cuando se le aplica solamente la entrada $x_1(t)$, $y_2(t)$ es la salida del sistema cuando se le aplica solamente la entrada $x_2(t)$, V_1 y V_2 corresponden a constantes arbitrarias.

A continuación se analiza la propiedad de linealidad para los siguientes casos:

a.

$$y(t) = x(t-1) + 3 \int_{-\infty}^t x(t') dt'$$

La primera etapa es obtener las salidas del sistema correspondientes a dos entradas, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, por separado

Con $x(t) = x_1(t)$ se obtiene la salida $y_1(t) = x_1(t-1) + 3 \int_{-\infty}^t x_1(t') dt'$.

Si $x(t) = x_2(t)$ se obtiene la salida $y_2(t) = x_2(t-1) + 3 \int_{-\infty}^t x_2(t') dt'$.

Si al sistema se le aplica la entrada $x(t) = V_1x_1(t) + V_2x_2(t)$, que corresponde a una combinación lineal de las entradas individuales ingresadas al sistema anteriormente, se obtiene la salida:

$$y(t) = \underbrace{(V_1x_1(t-1) + V_2x_2(t-1))}_{x(t-1)} + 3 \int_{-\infty}^t \underbrace{(V_1x_1(t') + V_2x_2(t'))}_{x(t')} dt'$$

Agrupando en forma adecuada los distintos términos de esta ecuación, se obtiene:

$$y(t) = V_1x_1(t-1) + 3 \int_{-\infty}^t V_1x_1(t') dt' + V_2x_2(t-1) + 3 \int_{-\infty}^t V_2x_2(t') dt'$$

Factorizando por las constantes V_1 y V_2 en los términos correspondientes:

$$y(t) = V_1 \underbrace{\left(x_1(t-1) + 3 \int_{-\infty}^t x_1(t') dt' \right)}_{y_1(t)} + V_2 \underbrace{\left(x_2(t-1) + 3 \int_{-\infty}^t x_2(t') dt' \right)}_{y_2(t)}$$

Es decir,

$$y(t) = V_1y_1(t) + V_2y_2(t)$$

lo cual, según la definición, implica que el sistema bajo estudio es lineal.

b.

$$y(t) = x(t) + x(t+3) + 2$$

Con $x(t) = x_1(t)$ se obtiene la salida $y_1(t) = x_1(t) + x_1(t+3) + 2$.

Si $x(t) = x_2(t)$ se obtiene la salida $y_2(t) = x_2(t) + x_2(t+3) + 2$.

Al aplicar la combinación lineal, $x(t) = V_1x_1(t) + V_2x_2(t)$, de las entradas individuales se obtiene:

$$y(t) = (V_1x_1(t) + V_2x_2(t)) + (V_1x_1(t+3) + V_2x_2(t+3)) + 2$$

Ordenando términos, se puede expresar la salida como:

$$y(t) = V_1(x_1(t) + x_1(t+3)) + V_2(x_2(t) + x_2(t+3)) + 2$$

$$y(t) = V_1 y_1(t) + V_2 y_2(t) + 2$$

Recordemos que si el sistema es lineal debe cumplir con:

$$y(t) = V_1 y_1(t) + V_2 y_2(t)$$

Suponiendo que el sistema es lineal, pueden igualarse estas dos expresiones, dando origen a

$$V_1 y_1(t) + V_2 y_2(t) + 2 = V_1 y_1(t) + V_2 y_2(t)$$

Al eliminar agrupar términos semejantes, esta ecuación da origen a la contradicción

$$2 = 0$$

Por lo tanto, la suposición ha sido incorrecta o, lo que es lo mismo, se está en presencia de un sistema no lineal.